La différence entre risque et volatilité : intérêt et limites du CAPM

Le CAPM (Capital Asset Pricing Model) établit la relation clef qui doit unir sur un marché efficient la prime de risque des différents actifs financiers à la prime de risque moyenne ou de marché (prime de risque d'un portefeuille composé de tous les actifs risqués offerts aux investisseurs sur les marchés).

Dans le CAPM, les primes de risque sont censées être proportionnelles au β:

$E(z_t) - r_t = \beta\,(E(M_t) - r_t)$, avec r_t le taux d'intérêt sans risque à la période t, z_t le rendement de l'actif considéré et M_t le rendement du marché pris globalement. Le coefficient de proportionnalité est le fameux $\beta = Cov(z_t,m_t)/Var\,(m_t)$ ou $\beta = \frac{\sigma_z}{\sigma_M}\rho_{z,M}$ (la dépendance linéaire entre primes de risque et β donne la « droite de marché »).

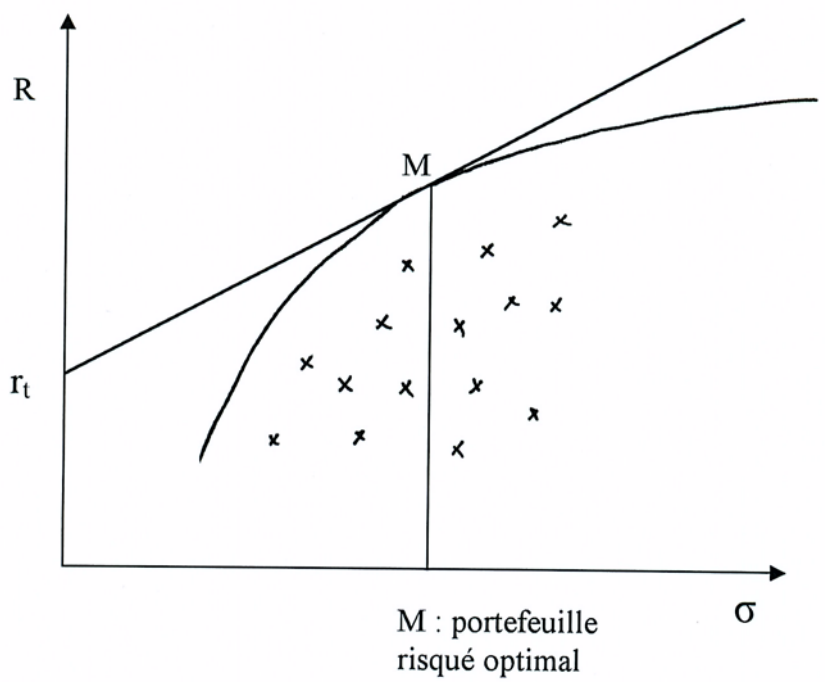
Donc relativement à la prime de risque de marché (formellement donnée par $E(M_t) - r_t$), la prime de risque d'un actif spécifique ne dépend pas uniquement de la volatilité relative de cet actif, soit $\frac{\sigma_z}{\sigma_M}$, comme on aurait pu le supposer naïvement, mais aussi de façon clef de la corrélation entre les actifs $\rho_{z,M}$. Pour des actifs corrélés négativement au marché, la prime de risque devrait être en théorie négative (effet d'assurance de portefeuille) et d'autant plus négative que la volatilité est élevée.

La démonstration n'est pas inutile car elle permet de rappeler, d'une part, le théorème des deux fonds et de mieux comprendre, d'autre part, pourquoi la corrélation joue un rôle clef.

- *Premier temps : Rappel du « Two funds theorem » longuement développé à l'oral pendant le cours.* **Pour la partie risquée de leur portefeuille, les investisseurs font en principe tous les mêmes investissements.** La seule différence entre les investisseurs prudents et les spéculateurs agressifs, c'est (ou devrait être) la proportion d'actif sans risque dans le portefeuille. La démonstration s'effectue simplement à partir d'un graphique représentant les couples rendement/risque (R : rendement, σ : écart-type) des différents portefeuilles possibles (voir vos notes de cours). L'hypothèse clef des raisonnements qui suivent, sur laquelle nous reviendrons, c'est que les investisseurs ont des « fonctions d'utilité » assez simples et qu'ils cherchent simplement à maximiser le rendement de leur portefeuille à risque donné.

Si l'on regarde des portefeuilles composés uniquement d'actifs risqués, la « frontière d'efficience » (qui décrit les portefeuilles optimaux pour différents niveaux d'aversion au risque) est la ligne courbe apparaissant sur le graphique qui suit. Mais si l'on tient compte du fait que les investisseurs peuvent détenir un actif sans risque rapportant r_t (voire parfois s'endetter à ce taux sans risque, ou à un taux proche), on s'aperçoit que l'on peut toujours faire mieux que cette frontière d'efficience limitée aux actifs risqués en combinant l'actif sans risque et le portefeuille risqué optimal M. En changeant la part d'actifs sans risque, on se déplace sur la « droite d'efficience » figurant sur le graphique où le rendement obtenu pour un

niveau de risque donné est toujours supérieur à ce que l'on pourrait obtenir en se limitant aux seuls actifs risqués.



Ce « théorème des deux fonds » est intéressant car il indique la façon optimale de constituer un portefeuille (i.e. l'aversion au risque détermine en principe la part des actifs risqués en portefeuille, et non pas le « stock-picking »). De plus, à partir du moment où quel que soit leur degré d'aversion au risque, les investisseurs partageant les mêmes anticipations structurent de la même façon la partie risquée de leur portefeuille, le portefeuille optimal M est facile à trouver : sur des marchés efficients, c'est forcément le « portefeuille de marché », c'est-à-dire le portefeuille composé de tous les actifs risqués cotés sur le marché. Nous nuancerons fortement cette conclusion plus loin en introduisant l'hétérogénéité des horizons d'investissement, mais elle permet de passer à la deuxième étape et à la démonstration du CAPM.

- *Deuxième temps : preuve qu'un actif risqué ne peut pas donner un rendement différent de celui indiqué par le CAPM*. Si pour un actif i, nous avions $E(z_t) > r_t + \beta\,(E(M_t) - r_t)$, on peut montrer que les investisseurs pourraient améliorer leur bien-être en déformant la partie risquée de leur portefeuille et en prenant plus de cet actif particulièrement rentable. Or, à l'équilibre, la structure des portefeuilles risqués doit être exactement celle du marché dans son ensemble.

Cette démonstration est intéressante car elle illustre les notions de risque diversifiable et non diversifiable. Elle a cependant été renvoyée en annexe.

Que penser du CAPM comme théorie de la prime de risque ?

1/ *Le CAPM fonctionne globalement bien sur longue période pour comparer entre elles les primes de risque requises sur les différentes actions.*

En dépit de ce satisfecit global quant à l'utilité du CAPM sur le marché des actions, un certain nombre d'anomalies sont apparues (rappelées pour mémoire ici, mais elles n'ont pas été mentionnées dans le cours oral). Le rendement offert par les petites valeurs et les valeurs décotées (c'est-à-dire avec un faible ratio valeur boursière/valeur comptable des actifs) paraît sur longue période anormalement élevé relativement au risque pris si celui-ci n'est mesuré que par le β de ces valeurs. Pour certains, cela ne serait pas nécessairement le signe d'une inefficience de marché mais pourrait s'expliquer par le caractère trop simplificateur des hypothèses faites sur les objectifs des investisseurs (maximisation du rendement à volatilité donnée). Par exemple, on pourrait soutenir que beaucoup de détenteurs importants d'actions sont par ailleurs entrepreneurs dans des entreprises non cotées. Les petites entreprises cotées et leurs propres entreprises auraient des caractéristiques de risque communes, par exemple une sensibilité particulière à la fermeture du crédit par les banques dans les périodes de tensions financières. Cette corrélation des risques justifierait une prime de risque élevée[1]. De façon peut-être plus réaliste, on pourrait aussi soutenir que la décote subie par les petites valeurs est une forme d'irrationalité, beaucoup d'investisseurs sous-estimant leur potentiel de rendement et préférant se cantonner aux grandes valeurs bien connues et bien suivies par les analystes financiers.

En tout état de cause, l'existence d'une rémunération spécifique du risque associé aux petites entreprises a conduit historiquement au développement des modèles multifactoriels qui déterminent le bon niveau des primes de risque relatives sur les actions quand l'investisseur est sensible à plusieurs facteurs de risque.

2/ *Mais le CAPM n'est pas une théorie générale de la prime de risque car il suppose connue la prime de risque sur le portefeuille de marché.*

On attend d'une véritable théorie du « prix du risque » financier qu'elle donne non seulement les primes de risque relatives sur les différents placements, mais aussi les primes de risque en niveau. Or, le CAPM ne dit rien sur $(E(M_t) - r_t)$, la prime de risque de marché dont découle le niveau des primes de risque sur les différents actifs.

3/ De plus, le CAPM n'est pas utilisable, et pas utilisé, pour rechercher la prime de risque relative des actions et des obligations.

Ce point a été largement évoqué dans le cours oral. Le CAPM décrit le comportement optimal d'investisseurs ayant un horizon de placement court et mesurant le risque de leur portefeuille par sa volatilité (on sait que pour un investisseur rationnel ayant un horizon long, la volatilité de la valeur du portefeuille mesure très imparfaitement le risque : un portefeuille tout

[1] En d'autres termes, pour ces investisseurs il faudrait chercher un béta plus général qui tienne compte de la corrélation entre le rendement des différents actifs et leurs risques spécifiques. Voir Cochrane (1999) : « New Facts in Finance », Document de Travail n°7169 du NBER, pour une discussion générale des hypothèses avancées pour expliquer les écarts au CAPM.

obligataire a par exemple une valeur très fluctuante à court terme, mais un risque faible à long terme).

On montre, voir le point M du graphique précédent, qu'il y a un portefeuille risqué optimal que tous les investisseurs ayant un horizon court détiendront parallèlement à l'actif monétaire sans risque. De plus, $E(z_t) = r_t + \beta\ (E(M^{ct}_t) - r_t)$, avec M^{ct}_t le rendement du portefeuille risqué optimal pour les investisseurs ayant un horizon court (cette relation dit simplement que ce portefeuille est imbattable pour les investisseurs ayant un horizon court).

On aurait pu faire le même type de raisonnement pour d'autres horizons de placement, en tenant compte du fait que ce qui intéresse l'investisseur à horizon long, ce n'est plus la volatilité instantanée de son portefeuille, mais la volatilité de son patrimoine à l'horizon qui est le sien. **Ainsi, quand les horizons d'investissement diffèrent, le théorème des « 2 fonds » doit être remplacé par le théorème des « 2xn fonds »** : il y a bien pour chaque horizon un placement sans risque – en général l'obligation indexée sur l'inflation émise par l'Etat avec une maturité égale à l'horizon - et un portefeuille risqué optimal, mais ceux-ci dépendent de l'horizon de placement.

Mais comme tous ces portefeuilles risqués optimaux dépendent de l'horizon, il est clair qu'il n'existe plus de moyen simple et mécanique pour les trouver. En particulier, le portefeuille M^{ct} optimal pour les investisseurs ayant un horizon court, et central dans la relation du CAPM, n'est plus nécessairement le portefeuille de marché. En effet, il est par exemple possible que ce portefeuille optimal ne contienne que très peu d'obligations alors que la dette publique est importante si les obligations longues sont très chères (i.e. faible prime de risque relativement aux placements monétaires) et ont été achetées par les investisseurs à long terme pour qui celles-ci représentent, en l'absence d'inflation, le placement sans risque. Or, si on ne connaît pas le portefeuille optimal pour les investisseurs ayant un horizon court, on ne peut plus calculer les β des différents placements, et donc leurs primes de risque relatives.

Au total, le CAPM décrit ainsi très mal les arbitrages entre actions et obligations et n'est pas une théorie générale du risque financier. **En dépit de la présentation générale qui en est souvent faite, c'est essentiellement un modèle de valorisation relative des actions et c'est d'ailleurs comme cela qu'il est utilisé** (les hypothèses du CAPM décrivent en effet de façon assez réaliste les arbitrages entre actions – et donc leur valeur relative. Il n'est pas absurde de penser que pour la partie des portefeuilles dévolue aux actions les investisseurs préfèrent effectivement à rendement donné une allocation minimisant la volatilité de court terme de la valeur de cette « poche » actions).

Annexe : Démonstration du rôle joué par le β

Supposons que pour un actif i, nous ayons $E(z_t) > r_t + \beta (E(m_t) - r_t)$. Nous allons montrer que les investisseurs pourraient augmenter leur bien être en déformant la partie risquée de leur portefeuille et en prenant plus de cet actif particulièrement rentable. Or, à l'équilibre, la structure des portefeuilles risqués doit être exactement celle du marché dans son ensemble.

On peut toujours écrire z^i_t sous la forme décomposée suivante $z^i_t = r_t + \beta^i (m_t - r_t) + \varepsilon^i_t$

Cette décomposition de z^i_t permet de séparer le rendement de l'actif considéré en sa partie sans risque (r_t), la partie liée à l'évolution du marché dans son ensemble ($\beta^i (m_t - r_t)$) et la partie liée à des chocs aléatoires spécifiques à l'actif considéré (ε^i_t). On montre en effet facilement que par construction ε^i_t est indépendant de m_t. **Les chocs $\boldsymbol{\varepsilon^i_t}$ sont dits parfaitement diversifiables :**

$COV(\varepsilon^i_t , m_t) = COV(z^i_t - r_t - \beta^i (m_t - r_t), m_t) = COV(z^i_t ,m_t) - \beta^i COV(m_t,m_t)$
$= \beta^i VAR(m_t) - \beta^i COV(m_t,m_t)$
$= 0.$

Partons d'un investisseur qui possède le portefeuille de marché et supposons qu'il renforce la part de l'actif i de la façon suivante :

- il investit a% de son portefeuille en plus dans l'actif i.
- il place également $a(\beta^i-1)$ en plus dans l'actif sans risque.
- Pour compenser, il réduit son investissement dans le portefeuille de marché de $- a\beta^i$.

Ces hypothèses ne sont évidemment pas définies au hasard. On cherche ainsi à conserver inchangée l'exposition au risque non diversifiable, c'est-à-dire le risque de marché. Si l'on veut investir 1% de plus dans un actif très « risqué » avec un β de 2, il faut ainsi désinvestir 2% du portefeuille de marché.

Quel est le résultat de ces modifications sur le couple rendement risque du portefeuille ?

Le rendement R est égal à $a z^i_t + (1- a\beta^i) m_t + a(\beta^i-1)r_t$, **soit $\boldsymbol{m_t + a\, \varepsilon^i_t}$**

L'espérance de rendement est donc : $E(m_t) + a\, E(\varepsilon^i_t)$ qui est supérieur au rendement du portefeuille de marché si l'actif considéré offre une surrendement par rapport au CAPM (en d'autres termes $E(\varepsilon^i_t)$ supérieur à 0)

Comme on pouvait s'y attendre le rendement attendu augmente du fait de la surperformance de l'actif considéré. Quelle est la variance de R pour ce nouveau portefeuille ?

$VAR (R) = VAR(m_t + a\, \varepsilon^i_t)$
Comme m_t et ε^i_t sont indépendants, $VAR(R)=VAR(m_t)+a^2VAR(\varepsilon^i_t)$,

On voit que quand l'on commence à augmenter la part de l'actif i, le gain en rendement est linéaire en a alors que l'augmentation de variance ou d'écart-type augmente comme le carré de a (c'est-à-dire beaucoup moins vite quand a est petit.

Exemple numérique : supposons que le marché a un écart-type de 10%. Quel est l'écart-type d'un actif qui suit le marché, mais avec un risque spécifique – c'est-à-dire décorrélé - de 1% ? La réponse n'est bien sûr pas 11%, mais seulement 10,05% !

On peut ainsi toujours trouver un a suffisamment petit pour que le gain en rendement l'emporte sur la perte de bien être minime liée à l'augmentation de la variance. Au total, si $E(z_t) > r_t + \beta (E(m_t) - r_t)$, on s'aperçoit que le portefeuille de marché peut être battu, ce qui est impossible à l'équilibre. Les investisseurs vont acheter tout actif dont le rendement dépasserait ce que prévoit le CAPM. Les prix montent, le rendement futur attendu baisse en conséquence et le marché trouve en principe son équilibre quand tous les actifs se trouvent sur la « droite de marché ».